अध्याय 12

हीरोन का सूत्र

(A) मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

- **आयत**

 (a) क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई

 (b) परिमाप = 2 (लंबाई + चौड़ाई)

 (c) विकर्ण = $\sqrt{(\text{लंबाई})^2 + (\text{चौडाई})^2}$

- **वर्ग**

 (a) क्षेत्रफल = (भुजा)^2

 (b) परिमाप = 4 × भुजा

 (c) विकर्ण = $\sqrt{2}$ × भुजा

- **आधार (b) और शीर्षलंब (h) वाला त्रिभुज**

 क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times b \times h$

- **a, b और c भुजाओं वाला त्रिभुज**

 (i) अर्धपरिमाप = $\frac{a+b+c}{2} = s$

 (ii) क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (हीरोन का सूत्र)

- **आधार a और बराबर भुजाओं b वाला समद्विबाहु त्रिभुज**

  समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{a}{4}\sqrt{4b^2 - a^2}$

- **भुजा a वाला समबाहु त्रिभुज**

  क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

- **आधार b और शीर्षलंब h वाला समांतर चतुर्भुज**

  क्षेत्रफल $= bh$

- **d_1 और d_2 विकर्णों वाला समचतुर्भुज**

  (a) क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\, d_1 \times d_2$

  (b) परिमाप $= 2\sqrt{d_1^2 + d_2^2}$

- **समांतर भुजाओं a और b तथा इन समांतर भुजाओं के बीच h दूरी वाला समलंब**

  क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\,(a + b) \times h$

- **भुजा a वाला समषड्भुज**

  क्षेत्रफल = 6 × भुजा a वाले एक समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल

  $$= 6\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$$

(B) बहु विकल्पीय प्रश्न

सही उत्तर लिखिए –

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : किसी समकोण त्रिभुज का आधार 8 cm और कर्ण 10 cm है। इसका क्षेत्रफल होगा

(A) 24 cm^2 (B) 40 cm^2 (C) 48 cm^2 (D) 80 cm^2

हल : उत्तर (A)

प्रश्नावली 12.1

निम्नलिखित में से प्रत्येक में सही उत्तर लिखिए –

1. एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल 8 cm^2 है। इसके कर्ण की लंबाई है।

(A) $\sqrt{32}$ cm (B) $\sqrt{16}$ cm (C) $\sqrt{48}$ cm (D) $\sqrt{24}$ cm

2. एक समबाहु त्रिभुज का परिमाप 60 m है। इसका क्षेत्रफल है

(A) $10\sqrt{3}$ m^2 (B) $15\sqrt{3}$ m^2 (C) $20\sqrt{3}$ m^2 (D) $100\sqrt{3}$ m^2

3. एक त्रिभुज की भुजाएँ 56 cm, 60 cm और 52 cm लंबाईयों की हैं। तब, त्रिभुज का क्षेत्रफल है

(A) 1322 cm^2 (B) 1311 cm^2 (C) 1344 cm^2 (D) 1392 cm^2

4. $2\sqrt{3}$ cm भुजा वाले समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल है

(A) 5.196 cm^2 (B) 0.866 cm^2 (C) 3.496 cm^2 (D) 1.732 cm^2

5. क्षेत्रफल $9\sqrt{3}$ cm^2 वाले एक समबाहु त्रिभुज की प्रत्येक भुजा की लंबाई है

(A) 8 cm (B) 36 cm (C) 4 cm (D) 6 cm

6. यदि एक समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $16\sqrt{3}$ cm^2 है, तो इस त्रिभुज का परिमाप है

(A) 48 cm (B) 24 cm (C) 12 cm (D) 36 cm

7. एक त्रिभुज की भुजाएँ 35 cm, 54 cm और 61 cm की हैं। इसके सबसे लंबे शीर्षलंब की लंबाई है

(A) $16\sqrt{5}$ cm (B) $10\sqrt{5}$ cm (C) $24\sqrt{5}$ cm (D) 28 cm

8. आधार 2 cm और बराबर भुजाओं में से एक भुजा 4 cm वाले समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल है

(A) $\sqrt{15}$ cm^2 (B) $\sqrt{\frac{15}{2}}$ cm^2 (C) $2\sqrt{15}$ cm^2 (D) $4\sqrt{15}$ cm^2

9. एक त्रिभुजाकार बोर्ड के किनारे 6 cm, 8 cm और 10 cm लंबाईयों के हैं। इस पर 9 पैसे प्रति cm^2 की दर से पेंट कराने का व्यय है

(A) 2.00 रु (B) 2.16 रु (C) 2.48 रु (D) 3.00 रु

(C) तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

सत्य या **असत्य** लिखिए तथा अपने उत्तर का औचित्य दीजिए :

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : यदि a, b, और c एक त्रिभुज की तीनों भुजाओं की लंबाइयाँ हैं, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ है, जहाँ s त्रिभुज का परिमाप है।

हल : असत्य। क्योंकि हीरोन के सूत्र में,

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c) \;=\; \frac{1}{2}\text{ (त्रिभुज का परिमाप) है।}$$

प्रश्नावली 12.2

सत्य *या* ***असत्य*** *लिखिए तथा अपने उत्तर का औचित्य दीजिए –*

1. आधार 4 cm और ऊँचाई 6 cm वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल 24 cm^2 है।

2. एक त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल 8 cm^2 है, जिसमें AB = AC = 4 cm है तथा $\angle A = 90°$ है।

3. एक समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $\frac{5}{4}\sqrt{11}$ cm^2 होगा, यदि उसका परिमाप 11 cm है और आधार 5 cm है।

4. एक समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $20\sqrt{3}$ cm^2 है, जिसकी प्रत्येक भुजा 8 cm है।

5. यदि एक समचतुर्भुज की एक भुजा 10 cm और एक विकर्ण 16 cm है, तो उस समचतुर्भुज का क्षेत्रफल 96 cm^2 है।

6. एक समांतर चतुर्भुज का आधार और संगत शीर्षलंब क्रमश: 10 cm और 3.5 cm हैं। उस समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल 30 cm^2 है।

7. भुजा a वाले एक समषड्भुज का क्षेत्रफल भुजा a वाले पाँच समबाहु त्रिभुजों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर होता है।

8. एक त्रिभुजाकार मैदान जिसकी भुजाएँ 51 m, 37 m और 20 m हैं को 3 रु. प्रति m^2 की दर से समतल कराने का व्यय 918 रु है।

9. एक त्रिभुज की भुजाएँ 11 cm, 12 cm और 13 cm की हैं। 12 cm लंबी भुजा के संगत शीर्षलंब की लंबाई 10.25 cm है।

(D) संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : एक त्रिभुजाकर खेत की भुजाएँ 41 m, 40 m और 9 m की हैं। ज्ञात कीजिए कि इस खेत में गुलाब की कितनी क्यारियाँ बनाई जा सकती हैं, यदि औसतन प्रत्येक गुलाब की क्यारी के लिए 900 cm^2 स्थान की आवश्यकता है।

हल : मान लीजिए कि $a = 41$ m, $b = 40$ m, और $c = 9$ m है।

तब, $$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{41+40+9}{2} = 45$$

त्रिभुजाकार खेत का क्षेत्रफल

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{45(45-41)(45-40)(45-9)}$$

$$= \sqrt{45\times4\times5\times36} = 180 \text{ m}^2$$

अतः, गुलाब की क्यारियों की संख्या $= \frac{180}{0.09} = 2000$

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : आकृति 12.1 में, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : 122 m, 120 m और 22 m भुजाओं वाले त्रिभुज के लिए

$$s = \frac{122 + 120 + 22}{2} = 132$$

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

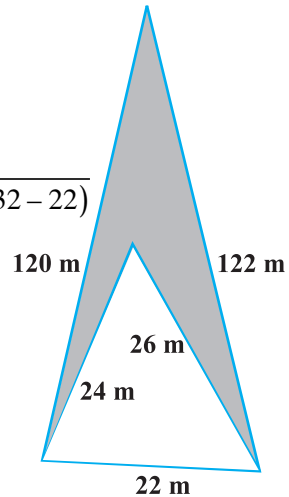
$$= \sqrt{132(132-122)(132-120)(132-22)}$$

$$= \sqrt{132\times10\times12\times110}$$

$$= 1320 \text{ m}^2$$

22 m, 24 m और 26 m भुजाओं वाले त्रिभुज के लिए,

$$s = \frac{22 + 24 + 26}{2} = 36$$

इस त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{36(36-22)(36-24)(36-26)}$

आकृति 12.1

$= \sqrt{36 \times 14 \times 12 \times 10}$

$= 24\sqrt{105}$

$= 24 \times 10.25$ m^2 (लगभग)

$= 246$ m^2

अतः, छायांकित भाग का क्षेत्रफल

$= (1320 - 246)$ m^2

$= 1074$ m^2

प्रश्नावली 12.3

1. भुजाओं 50 m, 65 m और 65 m वाले त्रिभुजाकार खेत में 7 रु प्रति m^2 की दर से घास लगवाने का व्यय ज्ञात कीजिए।

2. एक फ्लाईओवर की त्रिभुजाकार पार्श्व दीवारों को विज्ञापनों के लिए प्रयोग किया जाता है। दीवारों की भुजाएँ 13 m, 14 m और 15 m हैं। विज्ञापनों से एक वर्ष में 2000 रु प्रति m^2 की दर से आय होती है। एक कंपनी इनमें से एक दीवार को 6 महीने के लिए किराए पर लेती है। उस कंपनी ने कितना किराया दिया होगा?

3. एक समबाहु त्रिभुज के अभ्यंतर में स्थित किसी बिंदु से तीनों भुजाओं पर लंब डाले जाते हैं। इन लंबों की लंबाई 14 cm, 10 cm और 6 cm हैं। इस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

4. एक समद्विबाहु त्रिभुज का परिमाप 32 cm है। एक बराबर भुजा और आधार का अनुपात 3 : 2 है। इस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

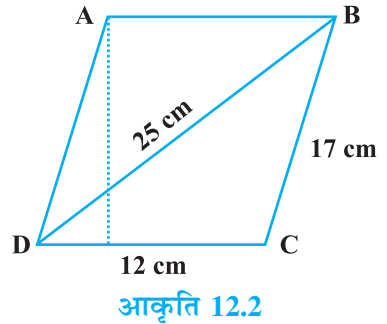
5. आकृति 12.2 में दिए हुए समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। साथ ही, शीर्ष A से भुजा DC पर शीर्षलंब की लंबाई ज्ञात कीजिए।

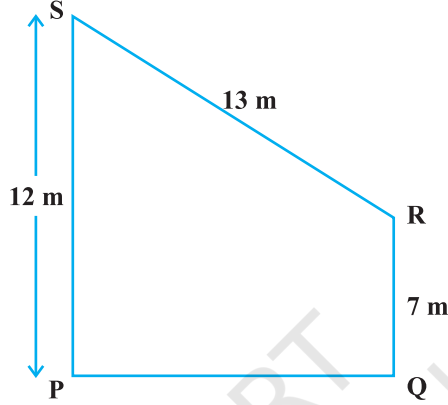
A B 25 cm 17 cm D C 12 cm

आकृति 12.2

6. एक खेत एक समांतर चतुर्भुज के आकार का है, जिसकी भुजाएँ 60 m और 40 m हैं तथा एक विकर्ण 80 m है। इस खेत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

7. एक त्रिभुजाकार खेत का परिमाप 420 m है तथा इसकी भुजाओं का अनुपात 6 : 7 : 8 है। इस खेत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

8. एक चतुर्भुज ABCD की भुजाएँ (एक क्रम में लेने पर) 6 cm, 8 cm, 12 cm और 14 cm हैं तथा प्रथम दो भुजाओं के बीच का कोण समकोण है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

9. एक समचतुर्भुज के आकार की शीट(चादर), जिसका परिमाप 40 cm और एक विकर्ण 12cm है, को दोनों ओर से 5 रु प्रति m^2 की दर से पेंट किया जाता है। पेंट करवाने की लागत ज्ञात कीजिए।

10. आकृति 12.3 में दी हुई ऊँचाई PQ वाले समलंब PQRS का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

आकृति 12.3

(E) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : यदि एक त्रिभुज की प्रत्येक भुजा दुगुनी कर दी जाती है, तो इस प्रकार बने नए त्रिभुज और प्रारंभिक त्रिभुज के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि प्रारंभिक त्रिभुज की भुजाएँ a, b और c हैं तथा अर्धपरिमाप s है।

तब, $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ है।

या, $2s = a + b + c$ है। (1)

अत:, प्रारंभिक त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \Delta$, मान लीजिए

कथन के अनुसार, नए त्रिभुज की $2a, 2b$ और $2c$ भुजाएँ हो जाती हैं। अत: नए त्रिभुज का अर्ध-परिमाप

$$S = \frac{2a+2b+2c}{2} = a+b+c \quad (2)$$

(1) और (2) से, हमें प्राप्त होता है कि $S = 2s$ है। (3)

अत:, नए त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$= \sqrt{S(S-2a)(S-2b)(S-2c)}$$

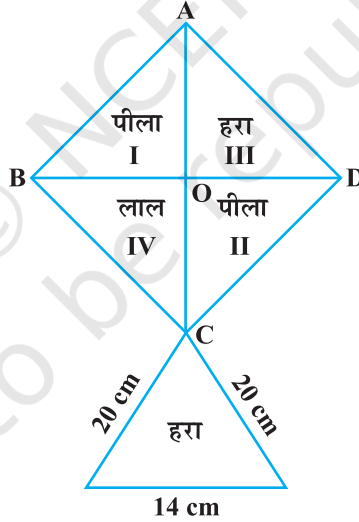
$$= \sqrt{2s(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)}$$

$$= \sqrt{16s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= 4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 4\Delta$$

अत:, वाँछित अनुपात 4:1 है।

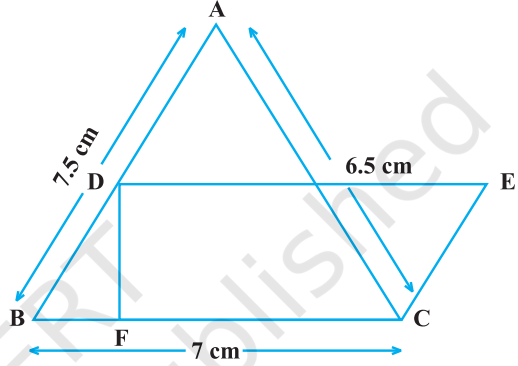
प्रश्नावली 12.4

1. आकृति 12.4 में दी हुई पतंग को बनाने के लिए प्रत्येक शेड (रंग) के कितने कागज की आवश्यकता होगी, यदि ABCD विकर्ण 44 cm वाला एक वर्ग है।

आकृति 12.4

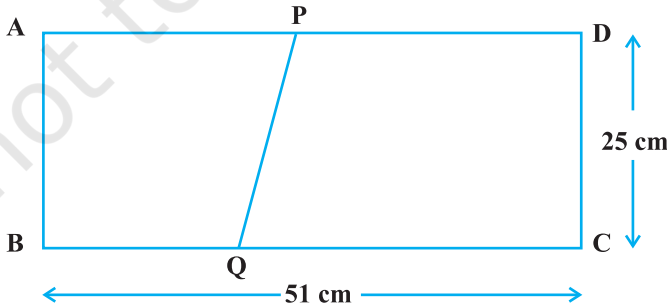
2. एक त्रिभुज का परिमाप 50 cm है। त्रिभुज की एक भुजा छोटी भुजा से 4 cm लंबी है तथा तीसरी भुजा छोटी भुजा के दुगुने से 6 cm कम है। त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

3. एक समलंब का क्षेत्रफल 475 cm^2 है तथा ऊँचाई 19 cm है। इसकी समांतर भुजाओं की लंबाइयाँ ज्ञात कीजिए, यदि एक समांतर भुजा दूसरी समांतर भुजा से 4 cm अधिक है।

4. एक मकान का निर्माण करने के लिए एक आयताकार भूखंड दिया गया, जिसकी लंबाई 40 m है तथा सामने की चौडाई 15 m है। नियमों के अनुसार, सामने और पीछे की ओर न्यूनतम 3 m चौड़ी जगह तथा प्रत्येक अन्य ओर पर न्यूनतम 2 m चौड़ी जगह छोड़नी आवश्यक है। वह अधिकतम क्षेत्र ज्ञात कीजिए जिसमें मकान का निर्माण किया जा सकता है।

5. एक खेत समलंब के आकार का है, जिसकी समांतर भुजाएँ 90 m और 30 m की हैं। ये दोनों भुजाएँ तीसरी भुजा से समकोण पर मिलती हैं। चौथी भुजा की लंबाई 100 m की है। यदि $1 m^2$ खेत की जुताई की लागत 4 रु है, तो खेत की जुताई में लगने वाली कुल लागत ज्ञात कीजिए।

6. आकृति 12.5 में, Δ ABC की भुजाओं में AB = 7.5 cm, AC = 6.5 cm और BC = 7 cm है। आधार BC पर एक समांतर चतुर्भुज DBCE की रचना की जाती है, जो क्षेत्रफल में Δ ABC के बराबर है। इस समांतर चतुर्भुज की ऊँचाई DF ज्ञात कीजिए।

आकृति 12.5

7. एक आयत ABCD की विमाएँ 51 cm × 25 cm हैं। इस आयत में से एक समलंब PQCD काटा जाता है, जिसकी समांतर भुजाएँ QC और PD हैं और ये 9 : 8 के अनुपात में हैं, जैसा कि आकृति 12.6 में दर्शाया गया है। यदि समलंब PQCD का क्षेत्रफल आयत के क्षेत्रफल का $\frac{5}{6}$ भाग है, तो QC और PD की लंबाइयाँ ज्ञात कीजिए।

आकृति 12.6

8. $50 \text{ cm} \times 70 \text{ cm}$ विमाओं वाली एक आयताकार टाइल पर, आकृति 12.7 में दर्शाए अनुसार एक डिज़ाइन बनाया जाता है। इस डिज़ाइन में 8 त्रिभुज हैं, जिनमें से प्रत्येक की भुजा 26 cm, 17 cm और 25 cm की हैं। डिज़ाइन का पूर्ण क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए तथा टाइल के शेष भाग का क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए।

आकृति 12.7